



**زیربرنامه:**

ResidualSmoothing\_expilicit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| سعید شیخی |  |
| **تهیه کنندگان مستند** | سعید شیخی | |
| **تاییدکنندگان** | مرتضی نامور | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 05/12/1394 | |
| **شناسه سند** | **MC2F148F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90** | |

1. وظایف

در این زیربرنامه در هر کدام از سلول‌های شبکه مقدار باقیمانده (ترم جابه‌جایی) براساس باقیمانده سلول‌های همسایه به طور صریح هموارسازی می‌گردد و مقدار باقیمانده‌ی هموارسازی شده به تابع اصلی بازگردانده می‌شود. در اینجا از تاثیر کشیدگی سلول ها صرفنظر شده است. باید توجه شود که این زیربرنامه برای رسیدن به یک حل پایا قابل استفاده است.

1. توضیحات و تئوری­ها

روش‌های زیادی برای افزایش سرعت همگرایی معادلات ناویر استوکس ایجاد شده است. یکی از این روش‌ها، روش هموارسازی مانده‌ها می‌باشد. با هموارسازی مانده‌ها می‌توان ناحیه‌ی پایداری را گسترش داد و با عدد CFL بزرگتری به همگرایی رسید. این تکنیک برای اولین بار توسط لرات [1] در روش لکس-وندروف[[1]](#footnote-1) معرفی شد و سپس جیمسون در [2] این تکنیک را در روش‌های رانگ کوتا به شکل صریح پیاده‌سازی کرد. برای هموارسازی مانده‌ها، قبل از محاسبه مقادیر بقایی در گام زمانی جدید مقدار  با مانده‌ی میانگین‌گیری شده‌ی  جایگزین می‌شود و سپس با استفاده از این مانده هموار شده مقادیر بقایی محاسبه می‌شود. روش هموارسازی مانده‌ها به دو صورت ضریب ثابت و ضریب متغیر پیاده‌سازی می‌گردد.

* 1. هموارسازی مانده‌های صریح با ضریب ثابت

در روش هموارسازی مانده‌های صریح با ضریب هموارسازی ثابت، مقدار  با حل رابطه‌ی زیر و به طور صریح بدست می‌آید [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  لاپلاسین تقسیم نشده[[2]](#footnote-2) است و برای هر سلول شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  سلول همسایه و  تعداد کل سلول‌های همسایه هر سلول از شبکه است. به این ترتیب معادله‌ی ‏(1) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این رابطه  تعداد کل سلول‌های همسایه است. در این حالت در هر سلول محاسباتی شبکه، میانگین مانده‌ها به طور صریح و به سادگی محاسبه می‌شود و در معادله جایگذاری می‌گردد. در این روش با تعیین ضریب هموارسازی و با توجه به نحوه گسسته‌سازی مکانی معادلات، حداکثر عدد کورانت مجاز برای پایداری محاسبه می‌شود.

برای تعیین ضرایب هموارسازی و اثر آن در دامنه پایداری در این حالت یک معادله‌ی موج یک بعدی به شکل زیر در نظر بگیرید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

رابطه بین ضریب هموارسازی و عدد CFL بستگی به نحوه گسسته‌سازی مکانی رابطه بالا دارد. با گسسته‌سازی مرکزی این رابطه در مکان داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در رابطه‌ی بالا عدد کورانت به شکل زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با تحلیل فون نیومن رابطه‌ی ‏(5) پارامتر  به صورت زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با به کاربردن هموارسازی مانده‌ها پارامتر  به شکل زیر تبدیل می‌شود [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن عدد کورانت روش هموارسازی شده و  به شکل زیر است [4]:



در این حالت شرایط مناسب پایداری به صورت زیر است [5]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  عدد کورانت روش هموارسازی نشده است. به این ترتیب داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

سپس:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بنابراین شرایط مناسب پایداری به شکل زیر تبدیل می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با استفاده از مشتق توابع مقدار  بر حسب  محاسبه می‌شود. به این ترتیب داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

به این ترتیب کاربر یک  دلخواه را انتخاب می‌کند با توجه به رابطه‌ی  بر حسب  مقدار آن محاسبه می‌شود و با توجه به رابطه ‏(13) مقدار حداکثر CFL روش هموارسازی شده به شکل زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با توجه به اینکه این رابطه با فرض گسسته‌سازی مکانی مرکزی و در حالت یک بعدی بدست آمده است برای گسسته‌سازی بالادستی و ابعاد بالاتر مناسب نیست و در هر حالت باید رابطه مخصوص به آن محاسبه شود که کار دشواری می‌باشد.

* 1. هموارسازی مانده‌های صریح با ضریب متغیر

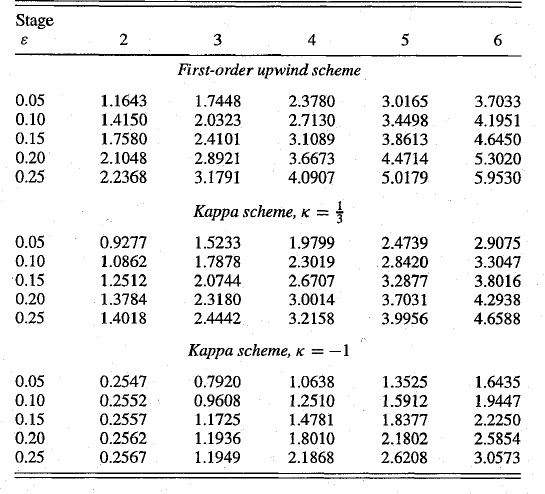
در روش هموارسازی مانده‌های صریح با ضریب متغیر در هر سلول محاسباتی ضریب هموارسازی در جهت  و به طور جداگانه و برحسب میزان کشیدگی سلول تعیین می‌شود [3]. به این ترتیب روش هموارسازی مانده‌ها به طور صریح و با ضرایب هموارسازی متفاوت در یک شبکه‌ی بی‌سازمان به شکل زیر پیاده‌سازی می‌شود[3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  تعداد سلول‌های همسایه هر سلول از شبکه در جهت  و  تعداد سلول‌‌های همسایه در جهت  می‌باشد.

روش هموارسازی مانده‌ها را هم می‌توان به طور ضمنی و هم‌ می‌توان به طور صریح پیاده‌سازی کرد. پیاده‌سازی روش هموارسازی مانده‌های صریح بسیار ساده‌تر و با حجم محاسباتی کمتری است ولی در آن نمی‌توان ضریب هموارسازی را بزرگ انتخاب کرد در نتیجه شرایط پایداری خیلی بهبود پیدا نمی‌کند [2].

نتیجه‌ی استفاده از روش هموارسازی مانده‌ها افزایش عدد کورانت مجاز و در نتیجه گام زمانی است. با توجه به اینکه روش هموارسازی مانده‌ها با ضریب ثابت در جریان‌های زیرصوت، فراصوت و جریان‌های ویسکوز کارایی مناسبی دارد [6 صفحه 309] در اینجا در هر سلول ضریب هموارسازی ثابت و توسط کاربر تعیین می‌شود سپس مانده‌ی هموار شده با استفاده از رابطه‌ی ‏(3) محاسبه می‌شود و پس از هموارسازی مانده‌ها با جایگذاری آن‌ها در معادله و گسسته‌سازی آن مقادیر بقایی محاسبه می‌شود. حداکثر عدد کورانت مجاز برای پایداری در این روش به نحوه گسسته‌سازی مکانی و زمانی و مقدار ضریب هموارسازی بستگی دارد. برای تعیین حداکثر عدد کورانت مجاز برای پایداری براساس مقدار ضریب هموارسازی و روش‌ مورد استفاده برای گسسته‌سازی مکانی و زمانی از ‏‏شکل (1) استفاده می‌شود [4]. در این شکل پارامتر  بیانگر گسسته‌سازی بخش مکانی است. به طوری که  بیانگر گسسته‌سازی مرکزی و  بیانگر روش بالادستی مرتبه 3 می‌باشد. لازم به ذکر است که اعداد کورانت بیان شده در این شکل مقداری است که روش هموارسازی مانده‌ها بهترین کارایی را دارد و حد پایداری ممکن است بیشتر از این مقادیر باشد ولی کارایی روش هموارسازی مانده‌ها کاهش می‌یابد. به این ترتیب با انتخاب یک ضریب هموارسازی مناسب (البته نه خیلی بزرگ که باعث ایجاد ناپایداری گردد، بهترین پیشنهاد  است) حداکثر عدد CFL برای پایداری طبق ‏شکل (1) محاسبه می‌شود و شبیه‌سازی انجام می‌گردد.



1. عدد کورانت مجاز برای روش‌های رانگ‌کوتا چند مرحله‌ای با هموارسازی مانده‌های صریح [4]
2. بخش­های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره‌گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. مقداردهی اولیه به آرایه هموارسازی

از آنجا که محاسبات مربوط هموارسازی هر سلول با توجه به سلول‌های همسایه آن انجام می‌شود و این مقادیر به آرایه مربوط به هر سلول اضافه می‌گردد با یک پروسه‌ی اضافه کردن مقادیر به مقادیر قبلی مواجه هستیم. به این دلیل باید آرایه مربوط به این کار در ابتدای زیربرنامه برابر صفر قرار داده شود.

1. بررسی تمام اضلاع غیرمرزی شبکه

با توجه به اینکه در اضلاع مرزی هر سلول هیچ همسایه‌ای وجود ندارد برای تعیین آرایه هموارسازی تمام اضلاع غیرمرزی سلول‌های شبکه بررسی می‌شوند تا سلول‌ها همسایه مشخص گردند.

1. ذخیره اطلاعات ضلع مورد بررسی در پارامترهای محلی

شماره سلول‌های اصلی و همسایه ضلع مورد بررسی در پارامترهای محلی ذخیره می‌گردد.

1. محاسبه آرایه هموارسازی

برای محاسبه‌ی باقیمانده هموار شده در هر سلول ابتدا باید آرایه‌ی هموارسازی در آن سلول محاسبه شود. برای اینکار در هر سلول محاسباتی مقدار لاپلاس تقسیم نشده‌ی باقیمانده به کمک رابطه‌ی ‏(2) محاسبه می‌شود و این مقدار در آرایه مربوطه ذخیره می‌گردد.

محاسبه باقیمانده هموار شده

پس از محاسبه‌ی آرایه‌ی هموارسازی در هر سلول محاسباتی همانطور که در رابطه‌ی ‏(3) دیده می‌شود با جمع کردن مقدار آرایه هموارسازی با مقدار باقیمانده در آن سلول، باقیمانده هموارسازی شده محاسبه می‌شود.

1. مراجع

[1] Lerat, A., Turkel, E., “Une Classe De Schemas Aux Differences Implicites Pour Les Systemes Hyperboliques De Lois De Conservation”, C.R. Acad. Sci., Vol. 288A, 1979, pp. 1033-1036.

[2] Jameson, A., “The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics,” J. Appl. Mech, Vol. 50 No. 4b, December 1983.

[3] Mavriplis, D.J., Jameson, A., “Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes,” AIAA Paper Vol. 28 No. 8, August 1990.

[4] Tai, C.H., Sheu, J.H., “Optimal Multistage Schemes for Euler Equations with Residual Smoothing,” AIAA Paper Vol. 33 No. 6, August 1995.

[5] Swanson, R.C., Turkel, E., “Multistage Schemes with Multigrid for Euler and Navier-stokes Equations”, NASA Technical Paper 3631, August 1997.

[6] Blazek, J., “Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications”, ELSEVIER, Second Edition, 2006.

1. Lax-Wendroff [↑](#footnote-ref-1)
2. Undivided Laplacian [↑](#footnote-ref-2)